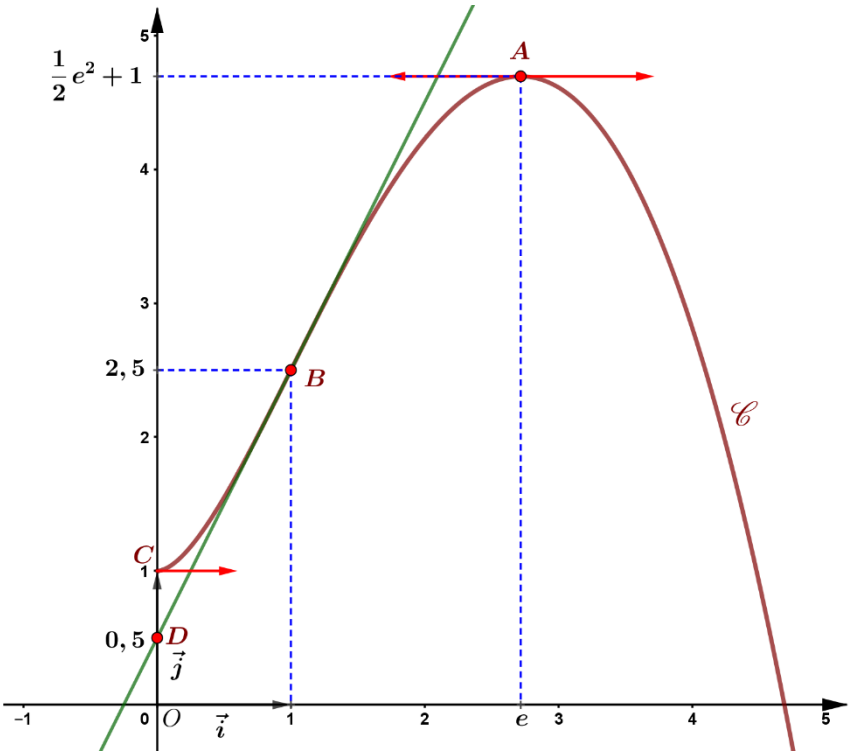
EXERCICE N°3 :	30'	5 points	

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^2\ln(ax)+b \text{ , si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

- Les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{C}$.
- La droite (BD) est la tangente à f au point B.
- $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1°) À l'aide d'une lecture graphique :

a) Déterminer $f'(1)$, $f'(e)$, $f''(1)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

2°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, déduire que : $a=b=1$.

b) Etudier alors la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$.

a) Etudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathscr{C}$ sur $[0,+\infty[$.

b) Tracer sur $[0,+\infty[$ la partie de $\mathcal{P}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit $n\in IN^*$, on pose $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{e} x^2-x^2\ln x\,dx$.

a) Interprétation graphiquement I_n.

b) Exprimer I_n en fonction de n.

c) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droite d'équations : $x=0$ et $x=e$.